Justification clé :

$E = F \oplus T = G \oplus T$

$F \subset G$ $\Rightarrow F = G$

Rq : en dim finie il suffit d'utiliser

$\dim F = \dim E - \dim T$

$= \dim G$

et $F \subset G$ donc $F = G$

En dimension quelconque on a $F \subset G$ donc il suffit de montrer $G \subset F$?

Soit $g \in G \subset E = F \oplus T$

$\exists ! (f,t) \in F \times T$ tq $g = f + t$

$t = g - f \in G$ (car $F \subset G$)

donc $t \in T \cap G = \{0\}$

d'où $g = f \in F$ donc $G \subset F$

donc $G = F$.

Conséquence :

Soient H un hyperplan de E

G sev de E tq $H \subset G \subset E$

alors $G = H$ ou $G = E$

En effet :

on a $\begin{cases} \operatorname{codim} H = 1 \\ H \subset G \end{cases}$

donc $\operatorname{codim} G \leqslant \operatorname{codim} H = 1$

donc $\operatorname{codim} G = 0$ ou $\operatorname{codim} G = 1 = \operatorname{codim} H$

par suite $G = E$ ou $G = H$

Rq : si H_1, H_2 hyperplan et $H_1 \subset H_2$ alors $H_1 = H_2$ car $\operatorname{codim} H_1 = \operatorname{codim} H_2 = 1$

Rq 2 : si $\begin{cases} H \text{ hyperplan de } E \\ x_0 \in E \setminus H \end{cases}$

alors $H \oplus \mathbb{K} x_0 = E$ en effet

$\begin{cases} H \subset H \oplus \mathbb{K} x_0 \subset E \\ H \neq H \oplus \mathbb{K} x_0 \text{ car } x_0 \notin H \end{cases}$ donc par la conséq précéd $H \oplus \mathbb{K} x_0 = E$.

Exercice:

Soit F s.e.v de E tq

$\underline{\text{codim } F < \infty}$

et soit G s.e.v de E

tq $F \cap G = \{0\}$

Mq { G est de dim finie ?
{ $\dim G \leqslant \text{codim } F$

et $\dim G = \text{codim } F \iff F \oplus G = E$

On a $F \subset F \oplus G$

et $\text{codim } F < \infty$

donc { $\text{codim}(F \oplus G) < \infty$
{ $\text{codim}(F \oplus G) \leqslant \text{codim } F$.

$\exists\, T$ s.e.v de dim finie tq

$E = F \oplus (G \oplus T)$

or $\text{codim } F < \infty$ donc $\exists\, S$ de dim finie

tq $E = F \oplus S$ donc $S \simeq G \oplus T$, $\dim S < \infty$

donc $\dim G < \infty$ et $\dim G \leqslant \dim S = \text{codim } F$.

Mq $\dim G = \omega \Leftrightarrow \dim F = \omega$ et $E = F \oplus G$

$\Leftarrow$ évident

$\Rightarrow$ on a $\dim G = \omega$ et $\dim F < \omega$

donc (I) $\boxed{\dim G = \dim S}$ $\left(\overset{\text{car}}{E = F \oplus S}\right)$

or $\boxed{E = F \oplus G \oplus T}$ (III)

et $S \simeq G \oplus T$

donc $\boxed{\dim S = \dim G + \dim T}$ (II)

De (I) et (II) on déduit $\dim T = 0$

donc (III) devient $E = F \oplus G$

Equations d'un hyperplan:

1) Cas où $\dim E = n$ est fini:

Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$

tq $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$x \in H \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

On dit alors que H est l'hyperplan d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

Preuve :

$\Rightarrow$ on a H un hyperplan donc $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tq $H = \ker \varphi$.

Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

alors $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)$

$x \in H \iff \varphi(x) = 0$

$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = 0$

On pose $a_i = \varphi(e_i)$

donc $\boxed{x \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0}$

on a $\forall x \in E$, $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$

si $a_i = 0$ $\forall i$, on aura $\varphi = 0$

absurde donc $(a_1, \dots, a_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.

$\Leftarrow$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$H = \left\{ x \in E \text{ tq } 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\}$ mq H hyperplan ?

Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. φ linéaire ?

$\varphi(\lambda x + y) = \sum a_i (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum a_i x_i + \sum a_i y_i = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$

donc φ forme linéaire

or $a \neq 0$ donc $\exists i$ tq $a_i \neq 0$

donc $\varphi(e_i) = a_i \neq 0$

donc $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$

et comme $H = \ker \varphi$

alors H est un hyperplan

Proposition :

soient φ, ψ deux formes linéaires non nulles

alors $\ker \varphi = \ker \psi \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ tq } \psi = \lambda \varphi)$

$\Leftarrow$ évident.

$\Rightarrow$ on a $H = \ker \varphi = \ker \psi$

hyperplan de E, $\varphi \neq 0 \Rightarrow \exists x_0$ tq $\varphi(x_0) \neq 0$

$x_0 \notin H$ hyperplan donc $E = H \oplus \mathbb{K} x_0$.

on a $\varphi(x_0) \in \mathbb{K}^*$ donc on peut définir :

$\lambda = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}$ donc $\psi(x_0) = \lambda \varphi(x_0)$

donc $\psi_{|\mathbb{K}x_0} = \lambda \varphi_{|\mathbb{K}x_0}$

de plus $H = \ker\varphi = \ker\psi$

donc $\psi_{/H} = 0 = \lambda\varphi_{/H}$

or $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$ et $\psi_{/\mathbb{K}x_0} = \lambda\varphi_{/\mathbb{K}x_0}$,

donc $\boxed{\psi = \lambda\varphi}$

De plus $\lambda \neq 0$ car sinon

on aura $\psi = 0$ absurde.

Equations d'un hyperplan :

Soit H un hyperplan de E

donc $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$

tq $H = \ker\varphi$

on a alors $x \in H \iff \varphi(x) = 0$

l'équation $\varphi(x) = 0$ s'appelle

une équation de l'hyperplan H.

et par la proposition précédente

les autres équations de H sont de

la forme $\psi(x) = 0$ tq $\psi = \lambda\varphi$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exemple:

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) P(x)\, dx = 0 \right\}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P \longmapsto \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) P(x)\, dx.$$

φ est une forme linéaire

$$\varphi\left(X - \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx > 0.$$

donc $\varphi \neq 0$

donc $H = \ker \varphi$ hyperplan

H est l'hyperplan d'éq :

$$H : \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) P(x)\, dx = 0$$

en prenant $\psi = 2\varphi$ on a une autre éq de H :

$$H : \int_0^1 (2x - 1) P(x)\, dx = 0$$

Exercice: H un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$

$M_0 \exists A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq $X \in H \iff \mathrm{Tr}({}^t AX) = 0$

on a

$$\mathrm{Tr}({}^tAx) = \sum_{j=1}^{n} ({}^tAx)_{jj}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ({}^tA)_{ji}\, x_{ij}$$

$$= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}\, x_{ij}$$

Soit $e = (E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$

donc $x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{1 \le i,j \le n} x_{ij} E_{ij}$.

comme $\dim E = \dim M_n(\mathbb{R}) = n^2 < \infty$.

Rappel : si E e.v de dim finie n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E alors tt hyperplan de E admet une éq de la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \quad \left[\text{avec } (a_1, \dots, a_n) \neq 0\right]$$

donc pour $E = M_n(\mathbb{K})$ et $e = (E_{ij})$, $\exists\, a_{ij}$ non tous nuls tq $x \in H \iff \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_{ij} = 0$.

donc $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \neq 0$

et $x \in H \iff \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_{ij} = 0$

$\iff \mathrm{Tr}({}^t A x) = 0 \quad (A \neq 0)$.

Application : Mq H hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible ? $(n \geq 2)$

On a : $\exists A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\} ; x \in H \iff \mathrm{Tr}({}^t A x) = 0$

Soit $r = \mathrm{rg}(A) \geq 1$ $\exists P, Q \in Gl_n(\mathbb{R})$ tq $A = P J_r Q$

avec $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$x \in H \iff \mathrm{Tr}({}^t A x) = 0$

$\iff \mathrm{Tr}[{}^t(P J_r Q) x] = 0$

$\iff \mathrm{Tr}({}^t Q J_r {}^t P x) = 0$

$\iff \mathrm{Tr}(J_r {}^t P x {}^t Q) = 0$

Posons $y = {}^t P . x {}^t Q$ alors $x \in H \iff \mathrm{Tr}(J_r y) = 0$

$\iff y_{11} + \dots + y_{rr} = 0$

$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient inversible.

donc $x = ({}^t P)^{-1} y ({}^t Q)^{-1} \in H \cap Gl_n(\mathbb{R})$.

Intersection finie d'hyperplans :

Proposition :

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ des formes linéaires sur E

$$u : E \longrightarrow \mathbb{K}^r$$
$$x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$$

alors

u surjective $\Leftrightarrow (\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre

Dans ce cas $H_i = \ker \varphi_i$ sont dits hyperplans indépendants et $\operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{r} H_i = r$